数理解析研究所講究録
272巻 1976年 49-60

逐次選択問題におけるサンプリング方式と停止規則（II）

熊本女大　城島 邦行
大分大·工　杉村 正彦
九大・理　浅野長一郎

§1. 序論

同様な目的をもつ二種の処理法について，それらの適用のうちで逐次的に優劣の選択を行っていく思考過程を研究する。このような二者択一の選択方式の設計に際しては，通常，オ一種とオ二種の過誤確率にもとずく検出力曲線の設定が実際上困難である。本報告は，このような観点から，逐次決定理論の立場による最適な逐次選択方式の設計を研究する。

臨床試験における逐次選択問題に初めて *Play-the-Winner Rule*（*PWR*） を導入したのは Zelen [14] である。このサンプリング規則によると，二処理のうち何れを試みるかは，その直前の試行結果によって定め，*success* ならば同じ処理法を，*failure* ならば他方の処理法を試行する。このサンプリング規則によれば，結果的に，劣る側の処理を受ける標本数

は必然的に少なくすることが可能で，両種の処理法を pair として同数の標本で観測する *Vector-at-a-Time Rule* (*VTR*) に比し，すぐれた特性のあることが示唆された。

この *Zelen* の提唱を契機に *Sobel-Weiss* [9],[10], *Hoel* [5], *Kiefer-Weiss* [6], *Nebenzahl-Sobel* [7], *Fushimi* [4] らは種々の *PWR* の型と *VTR* の優劣を論じた。これらは，すべて対象を無限母集団とし，異なる二項確率をもつ二つの処理法の逐次選択問題としてサンプリング方式に *PWR* を用いて，*inverse stopping* やその変形による停止規則を適用した。この際，彼等は事前に規定された定数 P^* ($\frac{1}{2} < P^* < 1$)，Δ^* ($0 < \Delta^* < 1$) に対し，母成功の確率の差を Δ として，方式R を適用したとき，$\Delta > \Delta^*$ かつ $P(CS \mid R) \geq P^*$ を設計条件とし，結論的には予め検出力を設定してしまう方式であった。

われわれも逐次選択の方式として，このような *PWR* の利点を認めつつ，選択方式設計の基準を改善し，また理論を有限の対象母集団に対して展開し，さらに広い範囲の *stopping rules* や，より一般化された PW サンプリング方式の諸型について，新方式を開発してきている。

本報告では，逐次選択の比較的単純な一方式として，有限の対象母集団に対し，停止規則を *inverse stopping rule* としたとき，サンプリング規則を *PWR* と *VTR* に適用し，各

最適方策について若干の数表を付し，特性を比較しつつ報告する。なお，ここでは論点を明確にするため，方式の型として一定の対象数で *truncate* して選択する型の逐次選択方式だけをとりあげることにする。

§2. 打切り型逐次選択方式

2.1. PWR をサンプリング規則，*inverse stopping rule* を停止規則とする方式 R_I

§1. で述べた逐次実験の各段階で，*success* 数の累積度数 S_i $(i=A, B)$ が r に到達すれば処理 i を *better* であると判定し，実験を停止し，また前以って与えられた実験実施可能な最大限の対象数 N_0 $(N_0<N)$ に達しても尚 $S_i<r$ で判定がつかないならば $A=B$ と判定することにする。このとき $p>p'$ の仮定の下で $S_A=r$ となり正しく A 優性と判定される確率 $P(CS|R_I)$，$S_B=r$ となり誤まって B 優性と判定される確率 $P(WS|R_I)$，$S_i<r$ となり $A=B$ と判定される確率 $P(NS|R_I)$ は次のように表わせる。

$$P(CS|R_I)=\frac{1}{2}\left[G_{J_1}\{I_q(j, K_1+1)\}+G_{J_2}\{I_q(j+1, K_2+1)\}\right] \qquad (1)$$

ここに

$$I_q(\alpha, \beta)=\frac{1}{B(\alpha, \beta)}\int_0^q x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \qquad (2)$$

$$G_J\{f(j)\} = p^r \sum_{j=0}^{J} \binom{j+r-1}{j} q^j f(j) \tag{3}$$

$$J_1 = \left[\frac{N_0 - r}{2}\right], \quad J_2 = \left[\frac{N_0 - r - 1}{2}\right] \tag{4}$$

$$K_1 = \min(r-1,\ N_0 - r - 2j),\ K_2 = \min(r-1,\ N_0 - r - 2j - 1) \tag{5}$$

$$P(WS|R_I) = \frac{1}{2}\left[G_{J_1}\{I_q(j,\ K_1+1)\} + G_{J_2}\{I_q(j+1,\ K_2+1)\}\right] \tag{6}$$

$$P(NS|R_I) = P_1(p,\ p') + P_2(p',\ p) \tag{7}$$

ここに，$P_1(p,p')$: CS に到達しない確率

$P_2(p',p)$: WS に到達しない確率

$P_2(p',p) = P_1(p',p)$ がなりたつ．

$$\begin{aligned} P_1(p,p') = \frac{1}{2}\Big\{ & \sum_{s=1}^{r-1} \binom{s+j-1}{j} p^s q^j \cdot I_{q'}(j,\ L_1+1) \\ & + \sum_{s=0}^{r-1} \binom{s+j}{j} p^s q^{j+1} \cdot I_{q'}(j,\ L_2+1) \\ & + \sum_{s=1}^{r-1} \binom{s+j-1}{j} p^s q^j \cdot I_{q'}(j+1,\ L_2+1) \\ & + \sum_{s=0}^{r-1} \binom{s+j}{j} p^s q^{j+1} \cdot I_{q'}(j+2,\ L_3+1) \Big\} \end{aligned} \tag{8}$$

ただし，$L_1 = \min(r-1,\ N_0 - s)$，$L_2 = \min(r-1,\ N_0 - s - 1)$

$L_3 = \min(r-1,\ N_0 - s - 2)$ (9)

又，第1項，第2, 3項，第4項の j は，それぞれ

$N_0 = s + k + 2j$，$N_0 = s + k + 2j + 1$，$N_0 = s + k + 2j + 2$ (10)

をみたすもの．

$P(CS) + P(WS) + P(NS) = 1$ がなりたつ．

又．上述の判定・停止規則に基づいて実験が終了するまでの平均検査対象数 $E(N_A+N_B)$ は，CS 又は WS に到達する場合の処理 A 又は B を受ける対象数 $E(N_A|S)$，$E(N_B|S)$ と NS に到達する場合の $E(N_A|NS)$，$E(N_B|NS)$ で表現される．すなわち，

$$E(N_A+N_B)=E(N_A|S)+E(N_B|S)+E(N_A|NS)+E(N_B|NS) \qquad (11)$$

$$E(N_A|S)=C(p,p')+W(p',p) \qquad (12)$$

$C(p,p')$：CS に関する部分

$W(p',p)$：WS に関する部分

$$C(p,p')=\frac{1}{2}\Big[G_{J_1}\{(r+j)I_{q'}(j,K_1+1)\}$$
$$+G_{J_2}\{(r+j)I_{q'}(j+1,K_2+1)\}\Big] \qquad (13)$$

$$W(p',p)=\frac{1}{2q}\Big[G_{J_1}\{j\,I_q(j+1,K_1+1)\}$$
$$+G_{J_2}\{(j+1)I_q(j+2,K_2+1)\}\Big] \qquad (14)$$

$$E(N_B|S)=C(p',p)+W(p,p') \qquad (15)$$

と表現され，NS に関する部分は，

$$E(N_A|NS)=A(p,p')+B(p',p) \qquad (16)$$

$A(p,p')$：CS に到達しないことに関する部分

$B(p',p)$：WS に到達しないことに関する部分

$$A(p,p')=\frac{1}{2}\Big[\sum_{s=1}^{r-1}s\binom{j+s}{j}p^s q^j\cdot I_{q'}(j,L_1+1)$$
$$+\sum_{s=0}^{r-1}(s+1)\binom{j+s+1}{j}p^s q^{j+1}\cdot I_{q'}(j,L_2+1)$$

$$+\sum_{s=1}^{r-1} s\binom{j+s}{j} p^{s} q^{j} \cdot I_{q'}(j+1,\ L_2+1)$$

$$+\sum_{s=0}^{r-1} (s+1)\binom{j+s-1}{j} p^{s} q^{j} \cdot I_{q'}(j+1,\ L_3+1)\Big] \qquad (17)$$

$$B(p',p)=\frac{1}{2q}\Big[\sum_{s=1}^{r-1} j\binom{j+s-1}{j} p'^{s} q'^{j} \cdot I_{q}(j+1,\ L_1+1)$$

$$+\sum_{s=0}^{r-1} j\binom{j+s}{j} p'^{s} q'^{j+1} \cdot I_{q}(j+1,\ L_2+1)$$

$$+\sum_{s=1}^{r-1} (j+1)\binom{j+s-1}{j} p'^{s} q'^{j} \cdot I_{q}(j+2,\ L_2+1)$$

$$+\sum_{s=0}^{r-1} (j+1)\binom{j+s}{j} p'^{s} q'^{j} \cdot I_{q}(j+2,\ L_3+1)\Big] \qquad (18)$$

ここに j は条件 (10) をみたすもの.

$$E(N_B \mid NS) = A(p',p) + B(p,p') \qquad (19)$$

$$E(N_i) = E(N_i \mid S) + E(N_i \mid NS)\ ,\ i=A,B \qquad (20)$$

以上の諸量を用いて，期待損失を定義する．

この選択方式による試行には，期待損失として，選択に到るまでの逐次観測において，被験対象が劣性処理を受ける際の期待損失と，誤った選択を行った際に残りの被験対象が劣性処理を受けることによる損失が考えられ，これらは両処理法の有効確率の差に比例すると考えられる．このような仮定の下に，選択方式 R_I による期待損失を実験試行中の損失，判定後の損失，および判定がつかず実験が終了した場合の損失で表現し，最小期待損失を基準とする逐次選択方式の最適

方策を具体的に設計することができる.

期待損失は次のように表現される.

$$E(Loss \mid R_I) = C(p-p')\Big[E(N_B) + \{N - E(N_A \mid S) - E(N_B \mid S)\}P(WS) + \frac{1}{2}(N - N_0)P(NS)\Big] \quad (21)$$

C: 比例定数

2.2. VTR をサンプリング規則, *inverse stopping rule* を停止規則とする方式 R_I'

2.1. でもとめた諸量に対応するものは次のようになる.

$$P(CS \mid R_I') = \frac{1}{2} E\{I_{q'}(j, r) + I_{q'}(j+1, r)\} \quad (22)$$

ここに $$E\{f(j)\} = p^r \sum_{j=0}^{N_0-r} \binom{j+r-1}{j} q^j f(j) \quad (23)$$

$$P(WS \mid R_I') = \frac{1}{2} E\{I_q(j, r) + I_q(j+1, r)\} \quad (24)$$

$$P(NS \mid R_I') = I_q(N_0-r+1, r) \cdot I_{q'}(N_0-r+1, r) \quad (25)$$

となり, 平均検査対象数についても 2.1. と同様の表現法を用いると,

$$E(N_A \mid S) = C(p, p') + W(p', p) \quad (26)$$

$W(p', p) = C(p', p)$ がなりたつ. $\quad (27)$

$$C(p, p') = \frac{1}{2} E\Big[(j+r)\{I_{q'}(j, r) + I_{q'}(j+1, r)\}\Big] \quad (28)$$

$$E(N_B \mid S) = C(p', p) + C(p, p') \quad (29)$$

がなりたつから, $E(N_B \mid S) = E(N_A \mid S)$ となる. 又.

$$E(N_A \mid NS) = N_0 \cdot I_q(N_0-r+1, r) \cdot I_{q'}(N_0-r+1, r) \quad (30)$$

更に

$$E(N_i \mid R_I') = E(N_i \mid S) + E(N_i \mid NS), \quad (i = A, B) \qquad (31)$$

であることは，2.1. と同様である．

以上の諸量を用いて，方式 R_I' についての期待損失は，

$$E(Loss \mid R_I') = c(p - p')\Big[E(N_B) + \{N - 2E(N_B \mid S)\}P(WS) + \frac{1}{2}(N - 2N_0)P(NS)\Big] \qquad (32)$$

c : 比例定数

§3. 数値例と若干の特性

有限対象のサイズを $N=100$，打切り対象数 $N_0=20$，判定累積成功数 $r=3(1)8$ の限られた場合に就いてではあるが，数値計算の結果得られた R_I, R_I' の特性について述べる．

図 1. は $P(CS)$ を $r=5$, $p'=.3,.6,.8$ について図示したものである．いずれの場合も $P(CS \mid R_I) \geq P(CS \mid R_I')$ であり，$p'=.5$ 以上の場合は $P(CS \mid R_I) \fallingdotseq P(CS \mid R_I')$ となっている．

図 2. は実験の大きさを示す $E(N_A+N_B)$ を $r=5$, $p'=.3,.8$ について図示したものである．いずれの場合も $E(N_A+N_B \mid R_I) < E(N_A+N_B \mid R_I')$ となって居り，R_I が R_I' より検査対象数が少なくてすむことを示している．

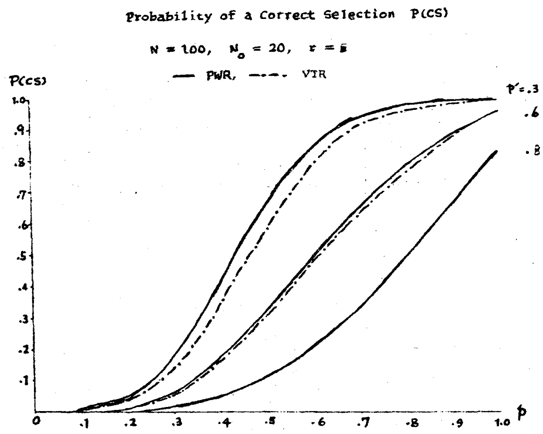

Fig. 1.

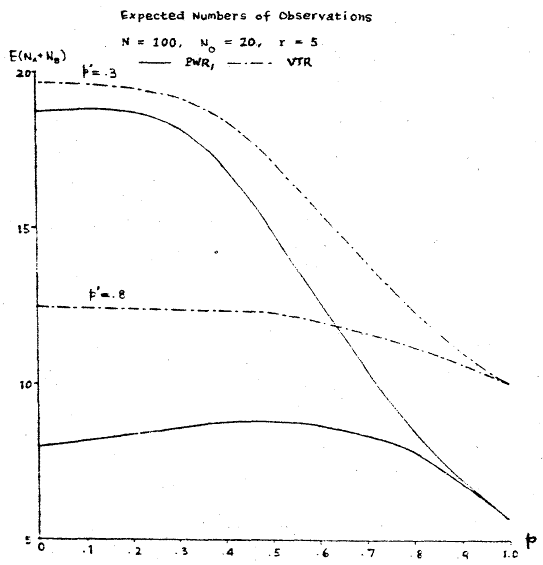

Fig. 2.

図3. は ELoss を $p=.7$, $p'=.3, .5$, $C=1.0$ として計算した結果を図示したもので，ELoss を最小ならしめる r^* が存在し，最小期待損失を基準とする最適逐次選択方式の設計が可能であることを示している．又 $E(Loss|R_I) < E(Loss|R_I')$ であり，ここでも R_I の R_I' に対する優越性が示されている．

表1. は $p=.7$, $C=1.0$ の場合の最適方策の特性を記したものである．この場合 r^* は $r^*(R_I) = r^*(R_I') + 1$ となっているが，われわれが最適性の基準とした ELoss については，$E\{Loss \mid r^*(R_I)\} < E\{Loss \mid r^*(R_I')\}$ が成立し，R_I の R_I' に対する優越性を示している．しかし一方では実験の大きさに反転が起っているが，その差は高々 1 であり，R_I の優越性を損うものではないと考えられる．

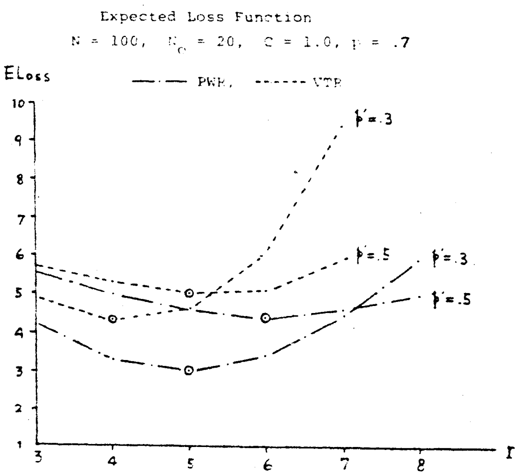

Fig. 3.

Table 1. Characteristics of Optimum Plans

N = 100, N_o = 20, C = 1.0, p = .7

VTR

p'	.3	.4	.5	.6
r*	4	4	5	6
P(CS)	.936	.864	.777	.634
$E(N_A+N_B)$	11.24	11.02	13.54	15.70
ELoss	4.39	5.23	5.05	3.65

PWR

p'	.3	.4	.5	.6
r*	5	6	6	6
P(CS)	.943	.863	.775	.649
$E(N_A+N_B)$	10.59	12.80	12.80	12.40
ELoss	3.07	4.08	4.48	3.49

以上限られた数値例からではあるが R_I の優越性はうかがわれ，サンプリング規則 PWR の VTR に対する優越性が示されている．

References

[1] Asano,C. & Jojima,K. (1976). " Play-the-winner and the inverse stopping rule with the truncated and un-truncated situations for a finite population " Research Report No.52, Res. Inst. Fund. Inform. Sci., Kyushu University.

[2] Asano,C. & Jojima,K. (1976). " Vector-at-a-time and the inverse stopping rule with the truncated and un-truncated situations for a finite population " Research Report No. 66, Res. Inst. Fund. Inform. Sci., Kyushu University.

[3] Colton,E. (1963). " A model for selecting one of two medical treatments " J. A. S. A., 58, 388 - 400.

[4] Fusimi,M. (1973). " An improved version of a Sobel-Weiss play-the-winner procedure for selecting the better of two binomial populations " Biometrika, 60, 517 - 523.

[5] Hoel,D.G. (1972). " An inverse stopping rule for play-the-winner sampling " J.A.S.A., 67, 148 - 51.

[6] Kiefer,J.E. & Weiss,G.H. (1971). " A truncated test for choosing the better of two binomial populations " J. A. S. A., 66, 867 - 71.

[7] Nebenzahl,E. & Sobel,M. (1972). " Play-the-winner sampling for fixed sample size binomial selection problem " Biometrika, 59, 1 - 8.

[8] Robbins,H. (1956). " A sequential decision problem with a finite memory " Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., 42, 920 - 23.

[9] Sobel,M. & Weiss,G.H. (1970). " Play-the-winner sampling for selecting the better of two binomial populations " Biometrika, 57, 357 - 65.

[10] Sobel,M. & Weiss,G.H. (1971). " Play-the-winner rule and inverse sampling in selecting better of two binomial populations " J. A. S. A., 66, 545 - 51.

[11] Sugimura,M., Goto,M. & Asano,C. (1969). " Optimum sequential designs based on Markov chains for selecting one of two clinical treatments " Mem. Fac. Engrg. Kumamoto Univ., 15, 1 - 16.

[12] Sugimura,M., Goto,M. & Asano,C. (1971). " Numerical tables of optimum sequential designs based on Markov chains for selecting one of two medical treatments" Bull. Math. Stat., 14, 27 - 56.

[13] Wald, A. " Sequential Analysis " John Wiley (1947).

[14] Zelen,M. (1969). " Play the winner rule and the controlled clinical trial " J. A. S. A., 64, 131 - 46.